

変動計算の公式の原理の理解

問1. $\sum x_i$ を用いて, 平均を求め式を導き出す.

A. $m = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n = \sum x_i / n$

問2. $\sum (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i : i = 1, 2, \dots, n$ を証明して下さい.

A.
$$\begin{aligned} \sum (x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + \\ &\quad (x_2 + y_2) + \\ &\quad \vdots + \\ &\quad (x_n + y_n) \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= \sum x_i + \sum y_i \end{aligned}$$

問3. $\sum kx_i = k \sum x_i : i = 1, 2, \dots, n$ 但し k は定数であることを示して下さい.

A.
$$\begin{aligned} \sum kx_i &= kx_1 + kx_2 + \dots + kx_n \\ &= k(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = k \sum x_i \end{aligned}$$

問4. $\sum k = nk : i = 1, 2, \dots, n$ (k は定数) を示して下さい.

A.
$$\sum k = \underbrace{k + k + \dots + k}_{n \text{ 個}} = nk$$

問5. $\sum (2x_i - 3y_i + 4) : i = 1, 2, \dots, n$ を展開して下さい.

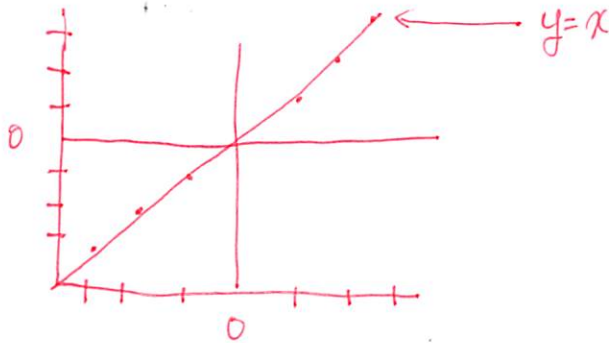
A.
$$\sum (2x_i - 3y_i + 4) = 2 \sum x_i - 3 \sum y_i + 4n$$

問6. $\sum (x_i - m)^2 = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n : i = 1, 2, \dots, n$ を示して下さい.
但し, $m = \sum x_i / n \rightarrow nm$ とする.

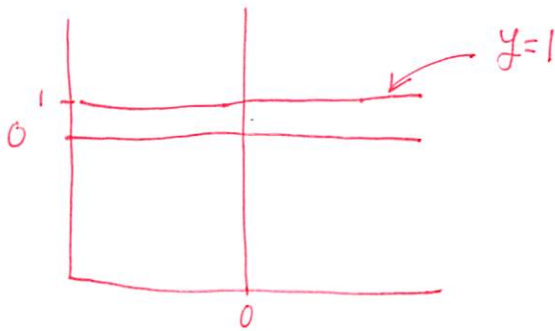
Q1. 平均とは何か。(4つ挙げてください)

- 対象となるデータを集めて平均にするような値。
- 物理学では「重心」のこと
- 平均は0次式における最小2乗解。
- 平均は分散平方和を最小にするような値。

Q2. $y = ax + b$ に $x = 1$, $b = 0$ を代入して与えられたグラフを示して下さい。

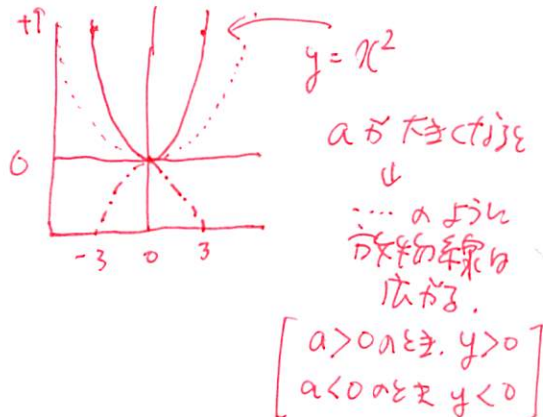


Q3. $y = ax + b$ において、0次式をグラフに示して下さい。但し $b = 1$ とする。



Q4. $y = ax^2 + bx + c$ において、 x^2 と x の大小関係から $x > 0$ に分けて示す。

- ・ $d = x^2 - x = x(x-1)$ の正負を調べる。
- ・ $x > 0$ のとき、 $x-1$ がどうなるか。
- ・ $x-1 > 0$, すなわち $x > 1$ のとき、 $d = \text{正} \times \text{正} > 0$
- ・ $x-1 < 0$, すなわち $x < 1$ のとき、 $d = \text{正} \times \text{負} < 0$
- ・ 結論する。 $1 > x > 0$ の範囲では、 x を2乗した値は元の値より小さい。



21. $y = (x+1)^2$ と $y = x^2$ と比較して共通点と相違点を述べよ。

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = (x+1)^2 \text{ との比較}$$

x	-3	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2	3
y ₁	9	4	1	1/4	0	1/4	1	4	9
y ₂	4	1	0	1/4	1	9/4	4	9	16

共通点,
形状はカ-7の
程度も含めて同じ
相違点,
 $y_1 = x^2$ とき $x=0$ で頂点
と(2,3)を
 $y_2 = (x+1)^2$ とき $x=-1$ で
頂点。

22. $y = a(x-h)^2 + k$ は $y = a(x-h)^2$ を y 軸に $+k$ だけ平行移動したものである。これを式の変形を用いて示せ。

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x^2 + x \cdot b/a + c/a)$$

$$= a \{ (x + b/2a)^2 - (b/2a)^2 + c/a \}$$

$$= a \{ (x + b/2a)^2 - b^2/4a^2 + 4ac/4a^2 \}$$

$$= a \{ (x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2 \}$$

$$= a(x + b/2a)^2 + (-b^2 + 4ac)/4a$$

$$\therefore y = a(x + b/2a)^2 + (-b^2 + 4ac)/4a //$$

① $a > 0$ のとき $y = -b/2a$ で最小値 (凹凸)

$a < 0$ のとき最大値 (凸凹)

を示す (2点) (凹凸)

② 最大・最小値は $(-b^2 + 4ac)/4a$

23. データ $x_1, x_2, \dots, x_n$ が与えられ、任意の変数 μ に対して x_i と μ の2乗の総和 (偏差平方和) を SS (sum of squared deviation) とする。 $SS = \sum (x_i - \mu)^2$ と表現できる。このとき、任意の変数 μ の中で SS を最小にする μ はどのようなものか? 平均値 $m = \sum x_i / n$ (算術平均) とする。

データ $x_1, x_2, \dots, x_n$ と表わす値の決定に定数である μ は n 個の変数である変数であることに注意する。 $SS = \sum (x_i - \mu)^2$ を μ について整理する。

$$\begin{aligned} \sum (x_i - \mu)^2 &= \sum (\mu^2 - 2x_i\mu + x_i^2) \\ &= \sum \mu^2 - \sum 2x_i\mu + \sum x_i^2 \\ &= n\mu^2 - (2\sum x_i)\mu + \sum x_i^2 \end{aligned}$$

これは $a = n, b = -2\sum x_i, c = \sum x_i^2$ の二次関数である。

$n > 0$ であるから、下に凸、 $\mu = -b/2a = 2\sum x_i / 2n = \sum x_i / n$ のとき

SS は最小値をとる。

$$\begin{aligned} (-b^2 + 4ac)/4a &= \{ -(-2\sum x_i)^2 + 4n\sum x_i^2 \} / 4n \\ &= \sum x_i^2 - (-2\sum x_i)^2 / 4n \\ &= \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n \end{aligned}$$

Q1. 1, 3, 5, 7, 9 ... $n=1, 2, \dots, 5$ までの項を求めよ

どう求めるか。

$$a_n = 2n - 1$$

$$a_n = 1 + 2(n-1)$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2$$

$$a_3 = 1 + 2 + 2$$

$$a_4 = 1 + 2 + 2 + 2$$

$$a_5 = 1 + 2 + 2 + 2 + 2$$

Q2. Q1を一般式を用いて表すこと。

$$a_n = 2n - 1, \text{ 前の項は } a_{n-1} = 2(n-1) - 1. \text{ したがって, } n > 1.$$

$$a_n - a_{n-1} = 2n - 1 - \{2(n-1) - 1\} = 2$$

Q3. 1から100まで足すこと。

1, 2, 3 ... 等差数列であることを示す。一般項の式: $a_n = a + (n-1)d$.

任意の項の前の項との差は1, したがって $d=1$ と定まる。初項は1. $\therefore a=1, a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$

$$\therefore d=1, \text{ 総和 } S \text{ を求める。 } S = a + (a+d) + \dots + \{a + (n-1)d\}$$

$$+ S = \{a + (n-1)d\} + \dots + a$$

$$2S = n \times \{2a + (n-1)d\}$$

$$S = n \times \{2 + (n-1)\} / 2$$

$$2 = 100 \times (100+1) / 2 = 1050$$

Q4. Q3の求め方を一般化して、1, 2, 3 ... と足すこと。

等差数列であることを示すこと。

★ Ans

Q5. 一般項の式: $a_n = a + (n-1)d$ の a と d の値を (Q4) にあてはめて求める。

★ Ans

Q6. 等差数列の第 n 項 ((2) 項と第 $n-1$ 項) の和の式を求めよ。

$$(1) 2, 4, 6, \dots$$

$$(2) 9, 6, 3, \dots$$

$$(3) 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

$$1) a=2, d=2, S = n \times \{4 + (n-1)2\} / 2 = n \times \{2 + (n-1)\} = n(n+1)$$

$$2) a=9, d=-3, S = n \times \{18 + (n-1)(-3)\} / 2 = n \times (21 - 3n) / 2 = 3n \times (7 - n) / 2$$

$$3) a=1, \text{ 第 } n-1 \text{ 項は } n-1, S = (n-1) \times \{1 + (n-1)\} / 2 = n(n-1) / 2$$

Q1. 調和数列 | $6, 3, 2, \dots$ の第4.5項を求めよ

逆数を取ると, $1/6, 1/3, 1/2, \dots$ となる等差数列に化け. 初項 $1/6$, 公差 $1/6$ である.
一般項の式は, $a_n = 1/6 + (n-1)/6 = n/6$. よって逆数をとった第4.5項は $4/6, 5/6$, したがって $3/2, 6/5$. Ans $3/2, 6/5$

Q2. 等比数列の一般式は $a_n = a \times r^{n-1}$, である.

$$a_n / a_{n-1} = r \text{ である. } S = a + a \square^1 + a \square^2 + \dots + a \square^{n-1}$$

とす. $\square$ に r を代入して示して下す.

$$\square = r$$

Q3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ の平方和の公式を示して下す.

示して下す.

3乗の隣り合う一般項の差の式を用いる.

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1. \quad (\text{右辺は2次式を用いる})$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1, \quad k \text{ は } 1, 2, \dots, n \text{ を代入する.}$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

これを $\square$ に代入して示す.

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + 3n(n+1)/2 + n$$

$$3S = n(n+1)(2n+1)/2 - 3n/2 = n(n+1)(2n+1)/2 - 3n/2$$

$$\therefore S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Q4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \{n(n+1)/2\}^2$ の立方和の公式を示して下す.

$$(k+1)^4 - k^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

(右辺は3次式を用いる)

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

k は $1, 2, \dots, n$ を代入する.

$$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^4 - n^4 = 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1$$

これを $\square$ に代入して示す.

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4S + 6(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 4(1 + 2 + \dots + n) + n$$

整理して

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4S + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n = 4S + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1)$$

$$n(n+1)(n^2 + 3n + 3) = 4S + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1)$$

$$4S = n(n+1)\{(n^2 + 3n + 3) - (2n+1) - 2\}$$

$$S = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

Q1. x, y, z の 3 数が $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$ の等差数列に成る必要十分条件は.

$$y - x = z - y (=d) \text{ により. } 2y = x + z : \text{必要十分.}$$

$$\text{逆に } y - x = z - y : \text{十分条件.}$$

2つの数 a, b の間に x が入る. 3数が $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$ の等差数列に成る必要十分条件は.

この x が「等差中項」と呼ぶ. このとき 3 数の間に成る

$$2x = a + b$$

$$x = (a + b) / 2$$

これは通常 $\square$ と表す.

$\square$ は x の平均を表す.

$$\square = \text{平均}$$

Q2. Q1 の $\square$ のこと. arithmetic mean と呼ぶ. この意味を説明して下さい.

算術平均, 相加平均のこと.

等差数列に成る場合, 両隣の間に位置する数値は
両隣の数値を足してそれを 2 で割った値になる.

例えば a, b の中間で x が入る. この問題を解く. 極めて自然な方法で距離的の中点を採用すること.

(これは暗黙の了解が存在する)

↓
なぜ?

「自分の観測している事象・現象が等差数列に従うような
値になる」ということ.

★ input に対して直接的 output が得られるような「 x 」
を前提とする (前提)

Q1. 0 以外の 3 数 x, y, z が 等比数列に なる 必要十分条件は

$$y/x = z/y (=r), \quad y^2 = xz \quad : \text{必要条件}$$

$$\text{逆に } y/x = z/y : \text{十分条件.}$$

2つの 数 a, b の 間に $x \in \lambda \mu$ 2, 3 番が 等比数列に なる と なる 2.

この x は 「等比中項」 と 呼ぶ。

この とき.

$$x^2 = ab$$

$$x = \pm \sqrt{ab}$$

この とき $\square$ と 呼ぶ。 $\square$ は 当 2 数 の 幾何平均 と 示す。

$\square =$ 幾何平均 (平均) 平均, geometric mean, 相乗平均。

Q2. $a, b > 0$ と して, $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$ を 証明 して 下 さい。

ヒント) 等号 が 成立 する 場合 は? この 不等式 の 意味 を 考え て 下 さい。

$(a+b)/2 - \sqrt{ab} = (a - 2\sqrt{ab} + b)/2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2/2 \geq 0, a=b$ の とき 等号 が 成立 する。 この とき $b \cdot a > 0$ の とき, 算術平均 Ma と 幾何平均 Mg と の 間に $Ma \geq Mg$ と 表わす。

算術平均 a, b の 中点 と 幾何平均 は 2 点 の 間に a 寄り に なる ことが 示す。

Q3. x, y, z が 等比数列に なる とき, $\log x, \log y, \log z$ の 関係 を 示 せ。

$$y^2 = xz, \text{ 両辺の 対数 を 取ると } 2 \log y = \log x + \log z$$

$$2 \log y = \log x + \log z$$

$$\log y = (\log x + \log z)/2$$

つまり, 対数変換後の 等差数列 になる。

Q4. x, y, z が 等差数列に なる とき, b^x, b^y, b^z の 関係 を 示 せ。

但し ($b \neq 0$)

$$x = a, y = a + d, z = a + 2d \text{ と 表せば } b^x, b^y, b^z$$

$$b^x = b^a, b^y = b^{a+d}, b^z = b^{a+2d} \text{ となる}$$

$$b^a, b^{a+d}, b^{a+2d} \rightarrow b^a, b^a \cdot b^d, b^a \cdot b^{2d} \text{ と なる}$$

一般化 すると, $a_n = b^a \cdot b^{d(n-1)}$. $\therefore a = b^a, r = b^d$ と 置けば

$$a_n = a r^{(n-1)}$$

つまり 等差数列 になる

Q1. 用量反応の関係は: dose (用量) の 2 倍に反応 (反応) response は 2 倍に到達する. 指数的用量に対して反応は直線的に増加する (対数変換). 用量 d , 反応 r とする.

$a' = d (a > 1)$ とする. これは対数変換である.

$r = \log a d$ という線形関数式になる.

$a = 10$ とし, 用量 10 と 100 に達するところを u とする?

その中点, 算術平均値 $(10+100)/2$ に u とするところがある.

これは中間値である. 適当な割合で. どうなる. これはどうなる?

ans 用量 10 に対して $10' = 10^1 \rightarrow r = 1$. 用量 100 = 10^2 , $r = 2$.

中間反応は $(1+2)/2 = 1.5$, 算術平均値 $(10+100)/2 = 55$.

これは 10^x に表わされ, 対数表から $x = 1.74 \rightarrow 1.5$ と対応する.

算術平均値 $\sqrt{10 \cdot 100}$ と対数表から, $\sqrt{10 \cdot 100} = 10^{1.5} \rightarrow r = 1.5$.

$\therefore r_a = \log_{10} 10 = 1$, $r_b = \log_{10} 10^2 = 2$, $(\log_{10} 10 + \log_{10} 10^2)/2 = 1.5$

算術平均値 $\sqrt{10 \cdot 100}$ の対数は $(\log_{10} 10 + \log_{10} 100)/2 = (\log_{10} 10 + \log_{10} 10^2)/2 \rightarrow$ 対数化すると算術平均

Q2. 0 と 1 の 3 数 x, y, z の調和平均は 1 である必要. 十分条件 これは中間値である.

$$\text{即ち } 1/y - 1/x = 1/z - 1/y (=d),$$

$$2/y = 1/x + 1/z : \text{必要条件}$$

$$\text{即ち } 1/y - 1/x = 1/z - 1/y : \text{十分条件}$$

この 2 つの数 a, b の間に $x \in \mathbb{R}$ なる x が調和平均に一致する.

この x は調和平均の中項である.

$$2/x = 1/a + 1/b$$

$$1/x = (1/a + 1/b)/2$$

$$x = 1 / \{ (1/a + 1/b)/2 \}$$

$$x = 2 / (1/a + 1/b)$$

これは □ と呼ばれる. □ は 2 つの数 a, b の調和平均.

□ = 調和平均, harmonic mean.

(a, b の逆数の平均の逆数)

Q1. liter (l/h) 当时 $\forall a$ の三酒と $\forall b$ の三酒と. 双方向とも同様の
 検分可能と見せると, liter 当时何 $\forall a$ の三酒と見せる?

$$\eta = 2h / \{ (h/a + h/b) \} = 2 / (1/a + 1/b)$$

Q2. 一定の距離を往復するとき, 行きは 4 km/h , 帰りは 6 km/h の
 歩く. 平均何 km/h と見せる?

$$x = 2l / \{ l/4 + l/6 \} = 2 / (1/4 + 1/6)$$

★ Q3. 調和平均と平均と $1/p$ の $1/p$ の検定手法の名を挙げて.
 (3つの数値 異なる場合. 3つの影響を考慮する点に注意)

Ans. 「t検定」

また, 一元, 二元配置法と検定結果, 返り値の水準内と
 見せる点に利用する.

(1. 2. 3. の影響を考慮する点に注意)

Q1. サイコロを投げるとき、その1の出る確率を、どのように考えますか。
これを数学的的確率とします。

★ サイコロは1から6の出る。全2で6種類の"case"があり、どの日も出るに等しい。いづれも同じような確率。 (同程度に期待される)とき。

1の出るに等しいcaseは1通り。このとき、1の出る確率は $\frac{1}{6}$ である。

① このとき全2の出る種類の数に等しい - 割合の全和の数 (n) とする。

② 1の出るに等しい。特定の事象 (Event) ^{場合の数} $\{ \}$ である。

③ caseが1通りの時の数に 場合の数 (r) と表現する。

よって、特定の事象 (E) の起こる確率は $\frac{r}{n}$ である。 $\square$ に r を入るものとする。

★ 5200

Q2. 偶数の目の出る確率についてどう考えますか。 但し 5200 を P と表す。
ヒト) 6 case 中の P の数。

Q3. 1の出る事象とその余事象を表す式で示して下さい。

Q4. 余事象と排反事象の類似点と相違点を考えますか。

Q5. 2つの排反事象 A, B のいづれも起こる確率を考えたとき。

Q6. 互に排反可能な事象の列と3つのいづれも起こる確率を考えたとき。

$$- \text{And } P(A \text{ or } B \text{ or } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Q1. J5に拾ち1回と、サ5J2振り1回と実行を3回とせよ、表と1a図の確率を求めよ。

J5... $\frac{1}{2}$, サ5J2... $\frac{1}{6}$ (表目の和組合せ 2×6 通り)
 $(\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$ 注) J5に拾ちとサ5J2振りの事象は独立。

Q2. 事象Aと事象Bとは独立ではなく、従属である3列を挙げよ。

赤・青・黄の3種の玉が1個ずつ入っている壺から球を無作為に引き出す。
 例. 取り出した玉を元に戻す $\rightarrow$ 1回目と2回目の事象は互いに独立 $\rightarrow P(AB)$
 確率は $(\frac{1}{3}) \times (\frac{2}{3}) = \frac{2}{9}$, 出し、再び試行の玉を戻さず、
 互いに独立ではない $\rightarrow (\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$ である。

Q3. 数学的の確率の概念の有用性と限界について述べよ。

(以下、うろたの着想を説明すると良い)

「事象の「発生回数」と各事象の発生が「同様に確からしい(同程度に期待される)」ことを前提と仮定している。この前提が妥当な限り、有用。

ただし、1円+1円=2円と考へる、どんなに多く、量が増え、より減り、いつか
 人間界(現実の世界には存在しない)。お店が認める範囲の原形を破り、1円である。
 「同様に確からしい」という仮定を人が受容可能な範囲で、理想の元に近づける。

★ Q4. Bayesの定理について、前もって前提として知られる分布を

用いることの有用性を示す。この分布のことを □ という。

□ に当てはまるものを示せ。

Ans. - 確率分布。

Q5. 特定の事象の数学的の確率を p と仮定して、この事象に属する
 試行を n 回行うとき、この事象の起る相対頻度 r/n は、 n が
 大きくなるに従って、 p に近づくことも示せる。これを □ という。

□ を示せ。

Ans. 大数の法則 (Bernoulliの定理)

Q6. 特定の事象に属する試行を n 回行うとき、この事象の起る
 相対頻度 r/n は、 n が大きくなるに従って、特定の p に近づく
 するならば、 p をこの事象の □ と定義する。 □ を示す。

Ans. 確率

Q7. Q6の定義の利点を示せ。 $\rightarrow$ (数学的の確率の明示に相違ない現象)
 に近づける可能性がある